## Проект МАТЕМАТИКА БЕЗ ФОРМУЛ

**Введение**

**Актуальность:** Как ученица 11 класса, в прошлом учебном году я начала готовится к ЕГЭ. Задания базового уровня предмета «Математики» я решаю практически все, но затруднение вызвало задание № 19, которое надо решать, не используя формулы и уравнения. Тогда я задалась вопросом: «Что надо знать, чтобы сделать данное задание?» Надо знать «Признаки делимости натуральных чисел». Известно, что не всегда одно натуральное число делится на другое натуральное число без остатка. При делении натуральных чисел, мы допускаем ошибки, в результате - теряем время. Признаки делимости помогают, не выполняя деление установить, делится ли одно натуральное число на другое. Но данную тему «Признаки делимости натуральных чисел на 2, 3, 5, 9, 10» мы изучали в 6 классе и признаков мало, чтобы решить задание № 19. Мне стало интересно, какие еще есть признаки деления натуральных чисел и можно ли ещё самой получить новые признаки делимости? Так возникла тема моей проектной работы.

**Предметная область моего исследования**- математика.

**Объект исследования:**задание №19 ЕГЭ (базовый уровень).

**Цель:**Изучить историю и материалы, посвященные признакам делимости натуральных чисел. Разработать сборник задач для подготовки к ЕГЭ, позволяющий освоить решения заданий типа № 19 на конструирование чисел с заданными свойствами. Создать пособие для подготовки к ЕГЭ (задание № 19) «Конструирование числа с заданными свойствами».

**Задачи:**

1. Изучить исторические сведения;
2. Научиться пользоваться научной литературой, грамотно находить информацию в интернете;
3. Исследовать способы решения задач на конструирование числа с заданными свойствами;
4. Научиться решать задачи №19 ЕГЭ, применяя изученные ранее методы;
5. Разработать сборник задач ля подготовки к ЕГЭ, позволяющий освоить решения заданий типа № 19 на конструирование чисел с заданными свойствами.
6. Создать пособие для подготовки к ЕГЭ (задание № 19) «Конструирование числа с заданными свойствами».

**Методы исследования:** изучение, анализ, систематизация, структуризация полученной информации.

**Гипотеза:**освоив новые признаки делимости натуральных чисел, можно повысить уровень математической подготовки, интерес к изучению математики среди учащихся, успешно справиться с решением заданий №19 ЕГЭ (базовый уровень).

**Новизна:** в ходе выполнения проекта я пополнила свои знания о признаках делимости натуральных чисел.

**Из истории.**

Признак делимости – это правило, по которому, не выполняя деления можно определить, делится ли одно натуральное число на другое. Признаки делимости всегда интересовали ученых разных стран и времен.

Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10, были известны с давних времен. Признак делимости на 2 знали древние египтяне за 2 тысячи лет до нашей эры, а признаки делимости на 2, 3, 5 были обстоятельно изложены итальянским математиком Леонардо Фибоначчи (1170-1228г.г.).

Вопросы делимости чисел рассматривались пифагорейцами и др.

Блез Паскаль

Большой вклад в изучение признаков делимости чисел внес Блез Паскаль (1623-1662г.г.). Юный Блез очень рано проявил выдающиеся математические способности, научившись считать раньше, чем читать. Свой первый математический трактат «Опыт теории конических сечений» он написал в 24 года. Примерно в это же время он сконструировал механическую суммирующую машинку, прообраз арифмометра. В ранний период своего творчества (1640-1650г.г.) разносторонний ученый нашел алгоритм для нахождения признаков делимости любого целого числа на любое другое целое число, из которого следуют все частные признаки. Его признак состоит в следующем: Натуральное число**а** разделится на другое натуральное число b только в том случае, если сумма произведений цифр числа**a** на соответствующие остатки, получаемые при делении разрядных единиц на число**b,**делится на это число.

**Признаки делимости натуральных чисел на 4, 6, 8, 15, 25, полученные самостоятельно**.

Выполняя действия деления, умножения натуральных чисел, наблюдая за результатами действий, я нашла закономерности и получил следующие признаки делимости.

25·4=100; 56·4=224; 123·4=492; 125·4=500; 2345·4=9380; 2500·4=10000; …

Умножая натуральные числа на 4, я заметил, что числа образованные из двух последних цифр числа делятся на 4 без остатка.

Признак делимости на 4 читается так:

**Натуральное** ч**исло делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры 0 или образуют число, делящееся на 4.**

Заметим, что 6=2·3. Признак делимости на 6**:**

**Если натуральное число одновременно делится на 2 и на 3, то оно делится на 6.**

Примеры:

216 делится на 2 (оканчивается 6) и делится на 3 (8+1+6=15, 15׃3), значит, число делится на 6.

625 не делится ни на 2, ни на 3, значит, не делится на 6.

2120 делится на 2 (оканчивается 0), но не делится на 3 (2+1+2+0=5, 5 не делится на 3), значит, число не делится на 6.

279 делится на 3 (2+7+9=18, 18:3), но не делится на 2 (оканчивается нечетной цифрой), значит, число не делится на 6.

125·8=1000; 242·8=1936; 512·8=4096; 600·8=4800; 1234·8=9872; 122875·8=983000;…

Умножая натуральное число на 8, я заметила такую закономерность, числа оканчиваются на три 0-ля или три последние цифры составляют число, которое делится на 8.

Значит, признак таков.

**Натуральное** ч**исло делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры 0 или составляют число, делящееся на 8.**

Заметим, что 15=3·5

**Ели натуральное число одновременно делится и на 5 и на 3, то оно делится на 15.**

Примеры:

346725 делится на 5 (оканчивается 5) и делится на 3 (3+4+6+7+2+5=24, 24:3), значит, число делится на 15.

48732 делится на 3 (4+8+7+3+2=24, 24:3), но не делится на 5,значит, число не делится на 15.

87565 делится на 5 (оканчивается 5), но не делится на 3 (8+7+5+6+5=31, 31 не делится на 3),

Выполняя умножение натуральных различных чисел на 25, я увидела такую закономерность: произведения оканчиваются на 00, 25, 50, 75.

**Число делится на 23 тогда и только тогда, когда число его сотен, сложенное с утроенным числом десятков, кратно 23**

Примеры:

28842 делится на 23, так как 288 + (3 \* 42) = 414, продолжаем 4 + (3 \* 14) = 46 очевидно делится на 23

Значит, **натуральное число делится на 25, если оканчивается на 00, 25, 50, 75.**

Разобьем число на группы по 2 цифры справа налево (в самой левой группе может быть одна цифра) и найдем сумму этих групп, считая их двузначными числами. Эта сумма делится на 99 тогда и только тогда, когда само число делится на 99.

Разобьем число на группы по 2 цифры справа налево (в самой левой группе может быть одна цифра) и найдем сумму этих групп с переменными знаками, считая их двузначными числами. Эта сумма делится на 101 тогда и только тогда, когда само число делится на 101. Например, 590547 делится на 101, так как 59-05+47=101 делится на 101).

**Признаки делимости по группам.**

Все перечисленные признаки делимости натуральных чисел можно разделить на 4 группы:

1группа - когда делимость чисел определяется по последней(им) цифрой (ми) - это признаки делимости на 2, на 5, , на 4, на 8, на 10, на 25.

2 группа – когда делимость чисел определяется по сумме цифр числа - это признаки делимости на 3, на 9, на7, на 37.

3 группа – когда делимость чисел определяется после выполнения каких-то действий над цифрами числа - это признаки делимости на 7, на 11, на 13, на 19.

4 группа – когда для определения делимости числа используются другие признаки делимости - это признаки делимости на 6, на 15, на 12, на14.

**Признаки делимости “по последним цифрам “**

**На 2.** Число делится на 2, если его последняя цифра – ноль или делится на 2. Числа, делящиеся на два, называются чётными, не делящиеся на два - нечётными.

**На 4.** Число делится на 4 , если две его последние цифры - нули или образуют число, которое делится на 4.

**На 5.** Число делится на 5, если его последняя цифра - ноль или 5.

**На 8.** Число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры - нули или образуют число, которое делится на 8.

**На10**. Число делится на 10 , если оно оканчивается на ноль.

**На 25.** Число делится на 25, если две его последние цифры - нули или образуют число, которое делится на 25 (25,50 или 75).

**На 2ⁿ, n∈N.** Число делится на 2ⁿ , если число, образованное его последними n цифрами, делится на 2ⁿ.

**На 5ⁿ, n∈N.** Число делится на 5ⁿ , если число, образованное его последними n цифрами, делится на 5ⁿ.

**На 10ⁿ, n∈N.** Число делится на 10ⁿ тогда и только тогда, когда n его последних цифр –нули.

ЗАДАНИЯ:

1. **Определите , какие из перечисленных чисел одновременно делятся на 4 и 5:**

А) 16 830

Б)148 580

*Решение:* а) Число 16 830 делится на 5, так как последняя его цифра 0. Данное число не делится на 4, так как число 30 , образованное последними двумя его цифрами, не делится на 4.

1. **Определите, какие из перечисленных чисел одновременно делятся на 2 и на 125:**

А) 196 350

Б) 267 750

*Решение :* б) Число 267 750 делится на 2, так как последняя его цифра 0. Данное число делится на 125= 5ᶟ ,так как число 750, образованное последними тремя его цифрами , делится на 125 .

**Признаки делимости “ по сумме цифр”**

**На 3.** Число делится на 3 , если сумма его цифр делится на 3.

**На 9.** Число делится на 9 , если сумма его цифр делится на 9.

**На 11.** На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, стоящих на нечётных местах , либо равна сумме цифр , стоящие на чётных местах ,либо отличаются от неё на число, делящиеся на 11 ( знакопеременная сумма цифр делится на 11).

ЗАДАНИЯ:

1. **Определите , какие из перечисленных чисел одновременно делятся на 2, 3 и 11:**

А) 924

Б) 693

*Решение:* а) Число 924 делится на 2 , так как последняя его цифра 4-чётная. 924 делится на 3 , так как сумма его цифр: 9+2+4=15 , а это число делится на 3. Наконец, 924 делится на 11 ,так как знакопеременная сумма его цифр делится на 11 (9-2+4=11).

1. **Определите, какие из перечисленных чисел одновременно делятся на 25 и 9 :**

А) 252 450

Б) 267 750

В) 410 550

*Решение:* в) Число 410 550 делится на 25 , так как число 50, образованное двумя последними его цифрами , делится на 25. Данное число не делится на 9, так как сумма его цифр: 4+1+5+5=15 не делится на 9.

**Признаки делимости ”с использованием отбрасывания цифр”**

**На 7.** Число делится на 7 , если результат вычитания удвоенной последней цифры из этого числа без последней цифры делится на 7.

*Алгоритм:*

1. Зачеркнуть последнюю цифру, из полученного числа вычесть число, равное удвоенной зачёркнутой цифре.
2. Повторить вычисления пункта 1 до получения двухзначного или однозначного числа. Если конечное число делится на 7 , то исходное число делится на 7.

**На 13.** Число делится на 13, если число его десятков ( число, получаемое из данного отбрасыванием последней цифры), сложенное с учетверённым числом единиц, кратно 13.

*Алгоритм:*

1. Зачеркнуть последнюю цифру и к полученному числу прибавить число, равное учетверённой зачёркнутой цифре.
2. Повторять вычисления пункта 1 до получения двухзначного или однозначного числа. Если последнее число этой последовательности делится на 13, то исходное число делится на 13.

**На 17.** Число делится на 17 , если разность между числом его десятков ( число , получаемым из данного отбрасыванием последней цифры) и упятеренным числом единиц кратна 17.

*Алгоритм:*

1. Зачеркнуть последнюю цифру и из полученного числа вычесть число, равное увеличенной в 5 раз зачёркнутой цифре.
2. Повторить вычисления пункта 1 до получения двухзначного или однозначного числа. Если конечное число делится на 17, то исходное число делится на 17.

**На 19.** Число делится на 19, если число его десятков (число, получаемое из данного отбрасыванием последней цифры) , сложенное с удвоенным числом единиц, кратно 19.

*Алгоритм:*

1. Зачеркнуть последнюю цифру и к полученному числу прибавить число, равное удвоенной зачёркнутой цифре.
2. Повторить вычисления пункта 1 до получения двухзначного или однозначного числа. Если конечное число делится на 19, то исходное число делится на 19.

ЗАДАНИЯ:

**1. Определите, какие из перечисленных чисел одновременно делится на 7 и на 13:**

А) 855 855

Б)921 690

*Решение:* а) Применим алгоритм признака делимости на 7:

85 5852\*5=85 575 ; 85572\*5=8547; 8542\*7=840; 84-2\*0=84; 8-2\*4=0. Так как конечное число, то исходное число делится на 7.

Применим алгоритм признака делимости на 13: 85 585+4\*5=85 605;

8560+4\*5=8580; 858+4\*0=858; 85+4\*8=117; 11+4\*7=39; 3+4\*9=39. Последнее число убывающей последовательности 39 делится на 13, следовательно, исходное число делится на 13.

1. **Определить, какие из перечисленных чисел одновременно делятся на 17, 19 и 23:**

А) 3 677 355

Б)3 290 265

*Решение:* а) Применим алгоритм признака делимости на 17:

367 735-5\*5=367 710; 36 771-5\*0=36 771; 3677-5\*1=3672;

367-5\*2=357; 35-5\*7=0. Так как конечное число 0 , то исходное число делится на 17.

Применим алгоритм признака делимости на 19: 367 735+2\*5=367 745;

36 774+2\*5=36 784; 3678+2\*4=3686; 368+2\*6=380; 38+2\*0=38;

3+2\*8=19. Так как получено число 19, то исходное число делится на 19.

Применим алгоритм признака делимости на 23: 367 735+7\*5=367 770; 36 777+7\*0=36 777; 3677+7\*7=3726; 372+7\*6=414; 41+7\*4=69. Последнее число убывающей последовательности 69 делится на 23, следовательно, исходное число делится на 23.

**Признаки делимости “c использованием группировки’’**

**Признаки делимости на 99.** Разобьем число на группы по 2 цифры справа налево ( в самой левой группе может быть одна цифра ) и найдём сумму этих групп, считая их двухзначными числами. Число делится на 99, если полученная сумма делится на 99.

**Признаки делимости на 101.** Разобьём число на группы по 2 цифры справа налево (в самой левой группе может быть одна цифра) и найдём сумму этих групп с переменными знаками (первая группа имеет знак ‘’+’’), считая их двухзначными числами. Число делится на 101, если полученная сумма делится на 101.

**Признаки делимости на 10ⁿ-1.** Разобьём число на группы по n цифр справа налево (в самой левой группе может быть от 1 до n цифр) и найдем сумму этих групп, считая их n-значными числами. Число делится на 10ⁿ-1 , если полученная сумма делится на 10ⁿ-1.

ЗАДАНИЯ:

1. **Определите, какие из перечисленных чисел одновременно делятся на 99 и 101:**

А) 343 035

Б)149 985

*Решение:* б) Разобьем число 149 985 на группы и найдем сумму этих групп: 14+99+85=198. Применим к полученному числу тот же алгоритм: 1+98=99. Полученное число делится на 99, следовательно, и исходное число делится на 99.

Разобьем число 149 985 на группы и найдем сумму этих групп с переменными знаками: 14-99+85=0. Полученное число делится на 101,следовательно, исходное число делится на 101.

**Применение признаков делимости натуральных чисел при решении задач.**

Признаки делимости применяются при нахождении НОД и НОК, а также при решении текстовых задач на применении НОД и НОК.

**Задача 1:** (Использование общих делителей и НОД)

Ученики 6 класса купили 203 учебника. Каждый купил одинаковое количество книг. Сколько было пятиклассников, и сколько учебников купил каждый из них?

**Решение:** Обе величины, которые требуется определить должны быть целыми числами, т.е. находиться среди делителей числа 203. Разложив 203 на множители, получаем:

203 = 1 ∙ 7 ∙ 29.

Из практических соображений следует, что учебников не может быть 29. также число учебников не может равняться 1, т.к. в этом случае учеников было бы 203. Значит, пятиклассников – 29 и каждый из них купил по 7 учебников*.*

**Ответ**:29 шестиклассников; 7 учебников

**Задача 2.**Имеется 60 апельсинов, 165 орехов и 225 конфет. Какое наибольшее число одинаковых подарков для детей можно сделать из этого запаса? Что войдёт в каждый набор?

**Решение:**

Количество подарков должно быть делителем каждого из чисел, выражающих количество апельсинов, конфет и орехов, причем наибольшим из этих чисел. Поэтому надо найти НОД данных чисел. НОД (60, 175, 225) = 15. Каждый подарок будет содержать: 60 : 15 = 4 – апельсина,175 : 15 = 11 – орехов и 225 : 15 = 15 – конфет.

**Ответ:** В одном подарке – 4 апельсина, 11 орехов, 15 конфет.

**Задача 3:** В 9 классе за контрольную работу 1/7 учеников получили пятёрки, 1/3 – четверки, 1/2 - тройки. Остальные работы оказались неудовлетворительными. Сколько было таких работ?

**Решение:** Решением задачи должно являться число, кратное числам: 7, 3, 2. Найдем сначала наименьшее из таких чисел. НОК (7, 3, 2) = 42. Можно составить выражение по условию задачи: 42 – (42 : 7 + 42 : 3 + 42 : 2) = 1 – 1 неуспевающий.

Математические отношения задачи допускают, что число учеников в классе 84, 126 и т.д. человек. Но из соображений здравого смысла следует, что наиболее приемлемым ответом является число 42.

**Ответ:** 1 работа.

**Задача 4.**

В двух классах вместе 70 учеников. В одном классе 7/17 учеников не явились на занятия, а в другом 2/9 получили отличные отметки по математике. Сколько учеников в каждом классе?

**Решение**: В первом из этих классов могло быть: 17, 34, 51… - числа, кратные 17. Во втором классе: 9, 18, 27, 36, 45, 54… - числа, кратные 9. Нам нужно выбрать 1 число из первой последовательности, а 2 число из второй так, чтобы они в сумме давали 70. Причем в этих последовательностях только небольшое число членов могут выражать возможное кол-во детей в классе. Это соображение существенно ограничивает перебор вариантов. Возможным единственным вариантом оказалась пара (34, 36).

**Ответ:** В первом классе – 34 ученика, во втором классе – 36 учеников.

**Задача 5.**

Два автобуса отправляются от одной площади по разным маршрутам. У одного из автобусов рейс туда и обратно длится 48 мин, а у другого 1 ч 12 мин. Через сколько времени автобусы снова встретятся на этой же площади?

**Решение:** НОК(48, 72) = 144 (мин). 144 мин = 2 ч 24 мин.

**Ответ:** Через 2 ч 24 мин автобусы снова встретятся на этой же площади.

**Задача 6.**

Ваня задумал простое трехзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух. Приведите примеры таких чисел.

**Ответ:** Может оканчиваться только на цифру 7. Таких чисел 4: 167, 257, 347, 527.

**Заключение.**

**Выводы:**

Работая над темой исследования, я значительно расширила свои знания по математике.

Я считаю, что проведенное мной исследование очень полезно для меня, а его результаты могут быть успешно использованы на уроках математики и во внеклассной работе. Они помогут при подготовке к успешной сдаче Единого Государственного Экзамена.

В процессе исследования признаков делимости натуральных чисел, научилась решать задания № 19 ЕГЭ.

Итогом моего исследования стало создание пособия для подготовки к ЕГЭ «Конструирование числа с заданными свойствами» и сборника заданий к нему. Пособие построено таким образом, что хорошо изучив теоретический материал, учащийся сможет сопоставить собственные знания по данному вопросу с условиями задачи, выбрать необходимый метод и решить их. В пособии к большинству задач приведены подсказки-указания, дающие возможность выхода на решение задачи. Если же это не удалось, предлагается изучить авторские решения, в сборнике заданий подборка заданий данного типа для самостоятельного решения.

Данная исследовательская работа дала мне возможность совершенствовать навыки работы с научно-популярной литературой и совершенствовать свои умения использования компьютерных программ.

**Список использованной литературы (источников):**

1. Галкин В.А. Задачи по теме «Признаки делимости ».// Математика, 1999.-№5.-С.9.
2. Гусев В.А., Орлов А.И., Розенталь А.Л. Внеклассная работа по математике в 6-8 классах.- М.: Просвещение, 1984.
3. Каплун Л.М. НОД и НОК в задачах. // Математика, 1999.- №7. – С. 4-6.
4. Пельман Я.И. Математика – это интересно ! – М.: ТЕРРА – Книжный клуб, 2006.
5. Энциклопедический словарь юного математика./ Сост. Савин А.П. – М.: Педагогика, 1989. – С. 352.
6. Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ» под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова
7. Ресурсы- Internet.